INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVINCIAL SAN JOSE
Decreto 00128 del 28 de enero de 2003
Resolución No. 004844 del 2 de Noviembre de 2018
Nit: 890500881-7 DANE 154518000273 ICFES 012575

INSTITUCION EDUCATIVA PROVINCIAL SAN JOSE
SEDE RAFAEL FARIA BERMUDEZ
MATEMATICAS
GRADO 10
DOCENTE: ORIOL DAVID ACOSTA COTE
Oriolacosta.docentefaria@gmail.com
Celular 3115795537
FECHA DE ENTREGA 21 DE ABRIL DE 2021

FUNCIONES

En la solución de problemas de aplicación es necesario modelar la situación mediante una o varias funciones. Situaciones como determinar la posición de una partícula en un tiempo dado o hallar el volumen de una esfera en términos de su radio son situaciones reales que se pueden modelar mediante expresiones algebraicas llamadas funciones.

RELACION Y FUNCION

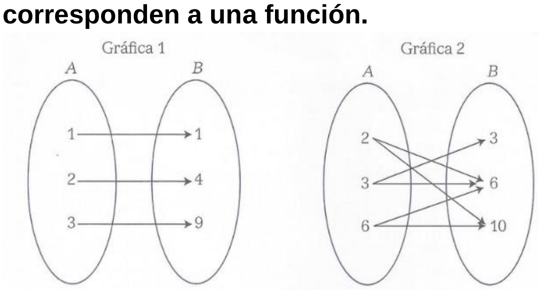
Una relación R de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto de parejas ordenadas contenidas en A y B, AXB, que cumplen una característica particular S.

$$R = \{(x, y) \in A \times b: S(x, y)\}$$

Las funciones son subconjuntos de las relaciones de ahí que toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Esto se debe a que algunas relaciones en las que cada elemento del conjunto A le pueden corresponder mas de un elemento del conjunto B.

Ejemplo
Indicar si las relaciones mostradas en las graficas corresponden a una función.



Las parejas ordenadas de la grafica 1 son (1,1), (2,4) y (3,9), entonces se observa que a cada elemento de A le corresponde solo un valor en el conjunto B, por tanto, se puede decir que se trata de una función. Las parejas ordenadas de la gráfica 2 son (2,6), (2,10), (3,3), (3,6), (5,6) y (5,10), como los elementos del conjunto A tienen dos valores en el conjunto B, Se dice que nos es función.

Función
Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A uno y solo uno de un conjunto B

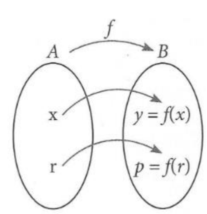
$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$$

Se lee la función f del conjunto A en el conjunto B y su ecuación es $y = f(x)$.

La variable x se denomina variable independiente y la variable y se denomina variable dependiente, ya que su valor se obtiene a partir del valor que toma x. Por ejemplo, la velocidad del ruido se incrementa a medida que aumenta la temperatura, luego la temperatura es la variable independiente y la velocidad del ruido es la variable dependiente.

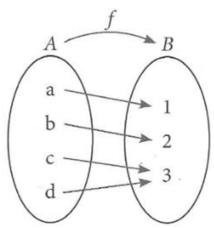
En las funciones el conjunto A se denomina conjunto de partida y al conjunto B se le denomina conjunto de llegada. A cualquier conjunto elemento x del conjunto A, le corresponde un único valor en B, que se designa como $f(x) = y$, el cual se conoce como la imagen de x por medio de f.

El conjunto de parejas ordenadas se llama grafo de la función.

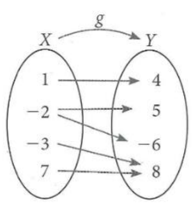


Ejemplo
Representa por medio de un diagrama sagital la siguiente función a partir de su grafo:
f={(a,1), (b,2), (c,3), (d,3)}.

La función esta definida de la siguiente manera: $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 3$. Así el conjunto formado por la primera componente de cada par ordenado es a= {a,b,c,d} y el conjunto formado por la segunda componente del par ordenado es {1,2,3}.
Por tanto, el diagrama sagital de la función es



Ejemplo
Determina si la siguiente relación es una función. Justifica tu respuesta.



La relación g nos es una función ya el elemento -2 del conjunto de partida se relación con dos elementos del conjunto de llegada, que son 5 y -6, lo que quiere decir que g(-2)=5 y g(-2)=-6, por lo tanto contradice la definición de función la cual dice que cada elemento del conjunto de partida se relaciona con uno y solo uno del conjunto de llegada.

Ejemplo
Establezca las parejas ordenadas de la siguiente relación. Luego determina si es o no una función

$$R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, y = x^2, -2 \leq x \leq 2\}$$

Primero debemos hallar los elementos del conjunto de partida, los cuales son: -2, -1, 0. 1, 2. Puesto que son todos los números enteros del intervalo cerrado [-2,2]. Para encontrar los elementos del conjunto de llegada reemplazamos los valores de x en la expresión,

$$y = x^2$$
$$f(-2) = (-2)^2 = 4;\ f(-1) = (-1)^2 = 1$$
$$f(0) = 0^2 = 0;\ f(1) = 1^2 = 1;\ f(2) = 2^2 = 4$$

Por tanto, las parejas ordenadas son:

$$R = \{(-2,4), (-1,1),\ (0,0), (1,1), (2,4)\}$$

Como a cada elemento del conjunto de partida solo le corresponde, un elemento en el conjunto de llegada, la relación es una función.

REPRESENTACION DE FUNCIONES

Una función se puede representar de varias formas, mediante la expresión verbal, la expresión algebraica, la tabla de valores o la representación gráfica.

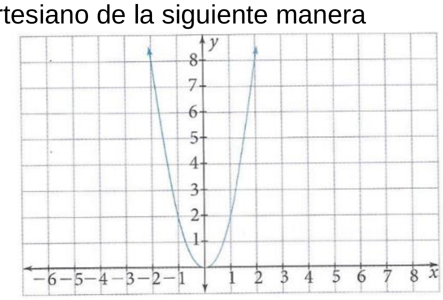
Expresión Verbal: Es la descripción de una función por medio de palabras. Por ejemplo, en la expresión "a cada número real se le asigna el doble del cuadrado del número". Se establece la función $f: A \to B$ donde A es el conjunto de los números reales y B es el conjunto cuyos elementos son los números reales que cumple la condición de ser el doble del cuadrado de cada número de A.

Expresión Algebraica: Es la representación mediante una formula o ecuación algebraica, esta conformada por las constantes, la variable independiente y la variable dependiente. Así la función que asigna a cada número real, el doble del cuadrado del número se representa mediante la siguiente formula $f(x) = 2x^2$ o $y = 2x^2$, donde x es la variable independiente y la y es la variable dependiente.

Tabla de valores: Es un arreglo de dos fila o columnas en donde se escriben las variables independientes en la primera fila o columna, y sus respectivas imágenes en la segunda. Por ejemplo, la tabla de valores correspondiente a la función $f(x) = 2x^2$ es la siguiente.

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	8	2	0	2	8

Representación Gráfica: Es la representación en el plano cartesiano de los pares ordenados o grafos de la función, Por ejemplo, $f(x) = 2x^2$ se representa en el plano cartesiano de la siguiente manera



INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVINCIAL SAN JOSE
Decreto 00128 del 28 de enero de 2003
Resolución No. 004844 del 2 de Noviembre de 2018
Nit: 890500881-7 DANE 154518000273 ICFES 012575

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

El dominio de una función es el conjunto de elementos para los cuales la función esta definida. Sea $f: A \to B$, se tiene que A (conjunto de partida) es el dominio y se simboliza $Dom\ f = A$.

Cuando una función esta definida mediante una expresión algebraica, el dominio de la función esta constituido por todos los números para los cuales la formula esta definida. Por esta razón se deben tener en cuenta algunas restricciones tales como: las divisiones entre cero, las raíces pares de números negativos, las funciones exponenciales con base menor o igual a cero y los logaritmos con argumentos negativos.

El rango de una función $f: A \to B$ es el conjunto formado por todas las imágenes de los elementos del dominio es decir $Ran\ f = \{\ y \in B |\ y = f(x) para\ algun\ x \in A\}$.

El codominio es el conjunto de llegada de una función. Si $f: A \to B$ entonces el codominio de la función es B es decir $Codom\ f = B$.

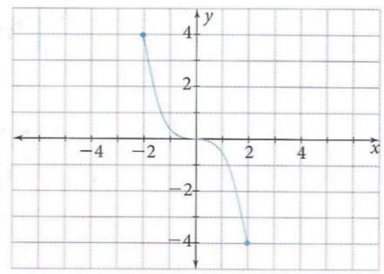
Ejemplo
Determine el dominio y el rango de la función cuyo conjunto de parejas ordenadas se muestra a continuación U= {(-1,3), (2,5), (-5,6), (-2,7), (3,0)}
Según la definición el dominio es el conjunto de partida el cual esta formado por las primeras componentes de las parejas ordenadas, mientras que las segundas componentes forman el rango, por tanto, tenemos
$Domf = \{-5, -2, -1, 2, 3\}$
$Ranf = \{0, 3, 5, 6, 7\}$

Ejemplo
Determine el rango de la función, en el intervalo dado.
$f(x) = \frac{1}{2}x^3\ en\ el\ intervalo\ [-2, 2]$

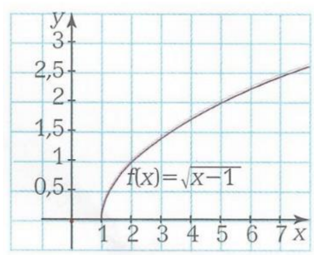
Para este caso es conveniente realizar una representación gráfica de la función en el intervalo dado, para tal fin se realiza una tabla de valores

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	0	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{2}$	-4

Después se realiza el bosquejo de la grafica ubicando cada pareja ordenada en el plano cartesiano

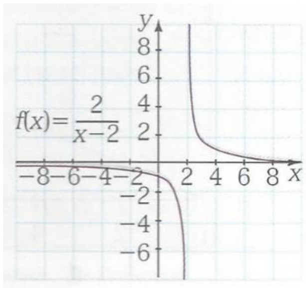


Ejemplo
Calcule el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-1}$
Al haber un radical de orden par, este se indetermina cuando la cantidad subradical toma valores negativos, ya que la raíz cuadrada, no está definida para números negativos, por tanto, se debe cumplir que:
$x - 1 \geq 0$
$x \geq 1$
Luego los valores que puede tomar x deben ser mayores o iguales que 1, por lo tanto, el dominio es:
$Dom\ f(x) = [1, \propto)$



Ejemplo
Calcule el rango de la función $y = \frac{2}{x-2}$
El rango de una función se puede hallar expresando $x = f(y)$ es decir despejando x en términos de y así:

$y = \frac{2}{x-2}$
$y(x-2) = 2$
$yx - 2y = 2$
$yx = 2 + 2y$
$x = \frac{2+2y}{y}$
$x = \frac{2}{y} + 2$
Como y es el denominador de las fracción este no puede ser cero, porque la división entre cero no esta definida para el conjunto d ellos números reales, por tanto el rango de la función es:
$$Ran\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$
Lo cual quiere decir que la función puede dar cualquier resultado menos el cero

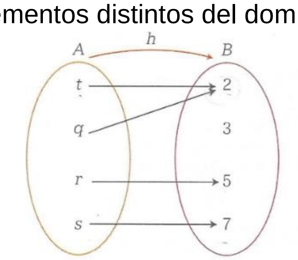


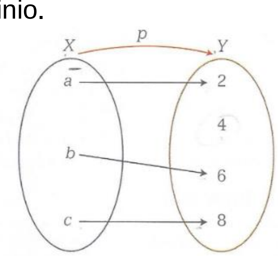
PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

Las funciones se pueden clasificar de acuerdo con la relación existente entre los elementos del conjunto de partida y el conjunto de llegada

FUNCION INYECTIVA

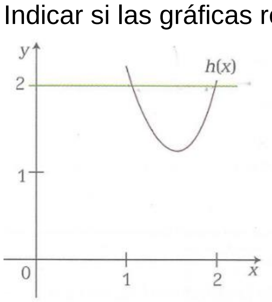
Una función f es inyectiva o uno a uno cuando dos elementos distintitos del dominio tienen imágenes distintas en el conjunto de llegada. Es decir, ningún elemento del conjunto de llegada es imagen de dos elementos distintos del dominio.

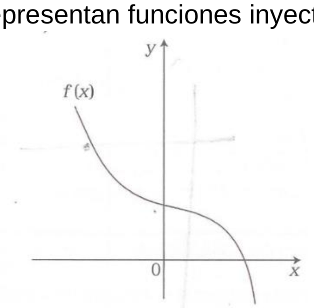




La función h:$A \rightarrow B$ no es inyectiva porque h(t)=2 y h(q)=2, eso indica que dos elementos del conjunto de partida se relacionan con un del conjunto de llegada. Por otra parte, la función P: $X \rightarrow Y$ sí es una función sobreyectiva porque cada elemento del conjunto de partida tiene una imagen diferente en el conjunto de llegada.

Ejemplo
Indicar si las gráficas representan funciones inyectivas

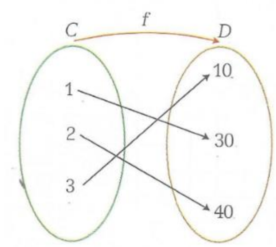




Para determinar de forma sencilla si una función es inyectiva, se traza una línea horizontal, si esta pasa por dos puntos de la gráfica la función no es inyectiva, en caso contrario la función es inyectiva. Por tanto, al trazar una línea horizontal en la grafica de h(x) nos podemos dar cuenta que está corta la grafica en dos puntos, por tanto, h(x) no es inyectiva. Caso contrario para grafica de f(x) ya que al trazar cualquier línea horizontal esta intercepta la grafica de f(x) en un solo punto y se puede afirmar que f(x) es inyectiva.

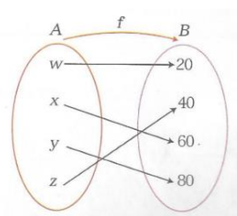
FUNCION SOBREYECTIVA

Una función f: $C \rightarrow D$ es sobreyectiva si solo si todo elemento del conjunto D es imagen de algún elemento del conjunto C. Es decir cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos un elemento del dominio. En este caso el rango es igual que el codominio.



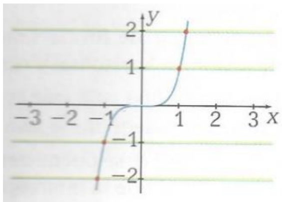
FUNCION BIYECTIVA

Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva. Es decir, cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen a lo sumo de un elemento del conjunto de partida.



Ejemplo
Determina si la función $f(x) = x^5$ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva

La función $f(x) = x^5$ es una función biyectiva ya que el rango es el conjunto de los números reales, además para cada valor del dominio le corresponde una y solo una imagen



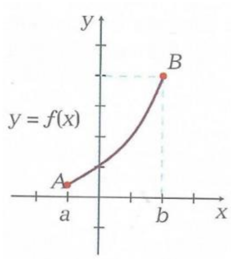
FUNCION DE VARIABLE REAL

Es una función en la cual los conjuntos de partida y de llegada son subconjuntos del conjunto de los números reales. Es decir $f: A \to B$ es una función de variable real si A⊆ ℝ y B⊆ ℝ

FUNCION CRECIENTE

Una función es creciente en un intervalo [a,b] si al aumentar el numero los valores de x aumentan los valores de f(x). Es decir $f(x_1)<f(x_2)$ siempre que $x_1<x_2$

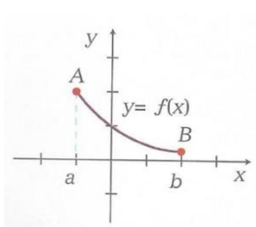
En otras palabras, una función es creciente si al movernos de izquierda a derecha la función sube



FUNCION DECRECIENTE

Una función es decreciente en intervalo [a,b] si al aumentar los valores x disminuyen los valores de f(x). Es decir, $f(x_1)>f(x_2)$ siempre que $x_1<x_2$

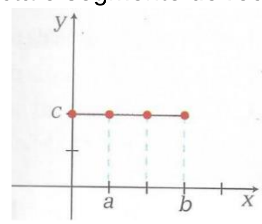
En otras palabras, una función es decreciente si al movernos de izquierda a derecha la función baja.



FUNCION CONSTANTE

Una función es constante en un intervalo [a,b] cuando no es creciente ni decreciente. Es decir $f(x_1)=f(x_2)$ siempre que $x_1<x_2$

Una función es constante cuando su representación grafica es una recta o segmento de recta horizontal



FUNCION PAR

Una función f es par si f(x) = f(-x) para todo x que pertenece al dominio de la función. Para determinar se una función es par se reemplaza x por -x en f, luego se realizan todas las operaciones indicadas que sean posible realizar y si al final f(-x) es igual a f(x) la función es par.

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x^2 + 5$ determine si la función es par

Reemplazamos -x en la función

$f(-x) = 2(-x)^2 + 5$

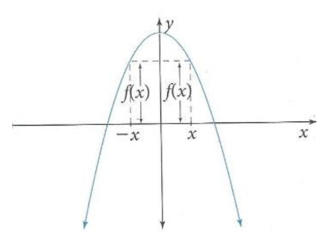
$f(-x) = 2x^2 + 5$

Por tanto

$f(-x) = 2x^2 + 5 = f(x)$ entonces $f(-x) = f(x)$ se concluye que $f(x)$ es una función par

Ejemplo

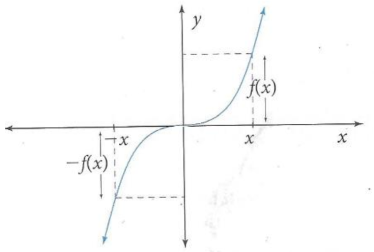
Dada la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 3$ determine si es par o impar.



Como la gráfica es simétrica con respecto al eje y es decir como las imágenes de x y -x son las mismas, se tiene que la función es par

Ejemplo

Dada la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ determine si es par o impar.



Como la gráfica es simétrica con respecto al origen (0,0) es decir la imagen de x es f(x) y la imagen de -x es f(-x)=-f(x), por tanto la función es impar

FUNCION IMPAR

Una función f es impar si f(-x)=-f(x)para todo x que pertenece al dominio de la función. Para determinar si una función es impar se reemplaza x por -x en f, luego se realizan todas las operaciones indicadas que sean posible realizar y si al final f(-x) es igual a -f(x) la función es impar

Ejemplo

Sea $f(x) = x^3 - x$ determine si la función es par

Reemplazamos -x en la función

$f(-x) = (-x)^3 - (-x)$

$f(-x) = -x^3 + x$

$f(-x) = -(x^3 - x) = -f(x)$

Por lo tanto

$f(-x) = -f(x)$

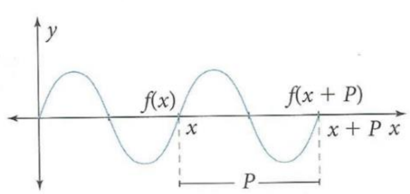
En conclusión, la función f es impar

FUNCIONES PERIODICAS

Algunas funciones tienen la propiedad de que sus imágenes se repiten exactamente en el mismo orden en ciertos intervalos del dominio de la función.

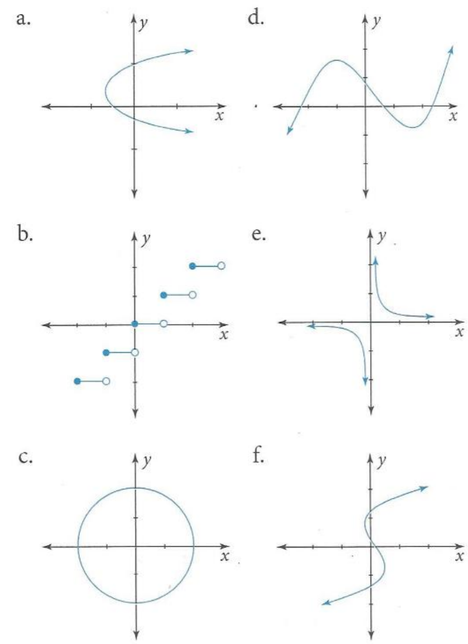
Una función es periódica si existe un numero P positivo tal que f(x)=f(x+p) donde p es el periodo de la función

Por ejemplo, las grafica de la función f muestra como se repite una función en intervalos iguales del dominio.

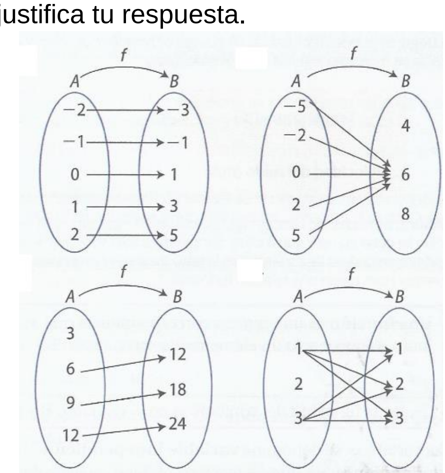


TALLER DE RETROALAIMENTACIÓN

1. Determina cuales de las siguientes graficas representan funciones y cuales no



2. Extrae las parejas ordenadas de cada grafica luego indica si la representación es función o no, en cada caso justifica tu respuesta.



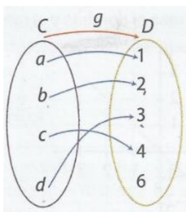
3. Representa cada tabla de datos como un diagrama sagital y luego indica si se trata de una función

x	2	4	6	8	10
y	−1	4	9	14	19

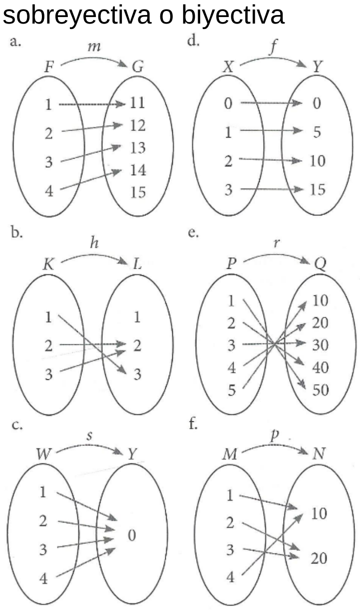
x	−1	0	1	2	3
y	11	10	11	14	19

x	23	45	67	89	103
y	−5	5	−5	5	−5

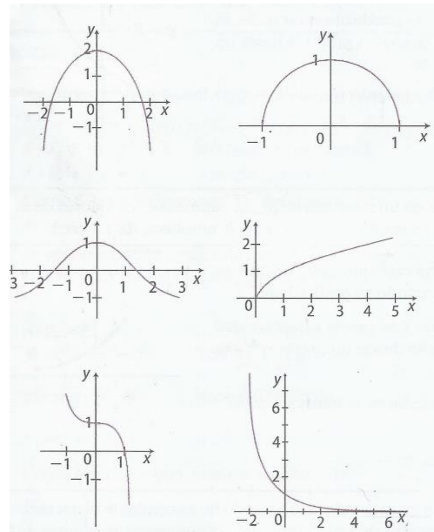
4. Realiza el diagrama sagital de las relaciones dadas, definidas del conjunto A en el conjunto B si se tiene que A= {7,14,21,28,35} y B= {2,3,5,7}
   a. $R = \{(x, y): x = 2\}$
   b. $R = \{(x, y): y = 5\}$
   c. $R = \{(x, y): y + x > 20\}$
   d. $R = \{(x, y): x^3 - 7y \leq 100\}$
   e. $R = \{(x, y): 2y - x \geq 1\}$
5. Observa el diagrama sagital de la función g. Luego resuelve



   a. ¿Cuál es el dominio de la función?
   b. ¿Cuál es el rango de la función?
   c. ¿Qué valor toma g cuando x=b?
   d. Si g(x)=3 ¿Qué valor toma x?
   e. Si g(x)=2 ¿Qué valor toma x?
6. Determina si la función dada es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva

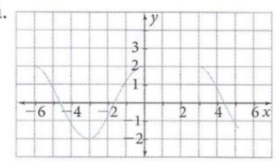


7. Observa las siguientes graficas. Luego indica si cada grafica representa una función inyectiva

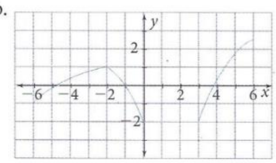


8. Determina los intervalos en los cuales la función es creciente, decreciente o constante a partir de su grafica

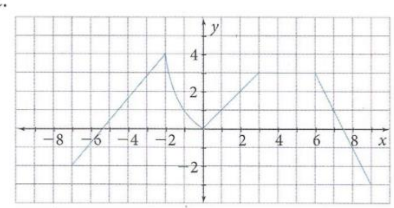
a.



b.



c.

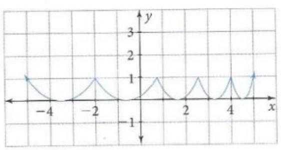


9. Determina si las siguientes funciones son pares o impares
   a. $y = 2x$
   b. $y = x^4 - 3$
   c. $y = \frac{1}{x^2}$
   d. $y = \frac{1}{4}x^3 + 2$

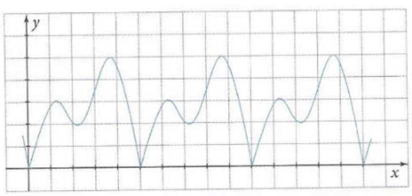
10. Identifica cuales de las siguientes funciones son periódicas. En caso de serlo determina el periodo

INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVINCIAL SAN JOSE
Decreto 00128 del 28 de enero de 2003
Resolución No. 004844 del 2 de Noviembre de 2018
Nit: 890500881-7 DANE 154518000273 ICFES 012575

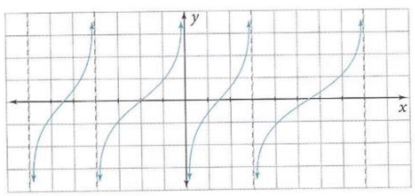
a.



b.



c.



EVALUACIÓN

1. Un péndulo se construye con una pesa y una cuerda. Cuando se suspende la pesa de la cuerda y se deja quieta permanece vertical; en este caso, se dice que la pesa está en la posición de equilibrio. Si con la cuerda tensa, se aleja la pesa de su posición de equilibrio y se suelta, la pesa realiza un movimiento de vaivén. A uno solo de estos movimientos de ida y regreso a la posición desde la cual se soltó se le denomina oscilación

Número de oscilaciones	Tiempo (s)
10	1,5
20	3
30	4,5
40	6
50	7,5

a. ¿Cuánto incrementa el tiempo a medida que aumentan las oscilaciones?
b. Realiza la grafica de los datos obtenidos
c. ¿Qué tiempo tardaría en hacer 125 oscilaciones?

2. Determina el dominio y el rango de las siguientes funciones

a. $y = 12x^3 - 35$
b. $y = \frac{1}{x+2}$
c. $y = \sqrt{x+9}$
d. $p(q) = \frac{3q^2+4}{q^2-4}$
e. $g(x) = \sqrt{\frac{x+7}{x+5}}$

3. Define una función que cumpla las condiciones
a. $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que sea sobreyectiva
b. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ que sea inyectiva
c. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea biyectiva
d. $p: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que sea inyectiva
e. Que sea inyectiva pero no sobreyectiva

4. Grafica una función que cumpla con las condiciones dadas en la tabla.

Condiciones para $f(x)$	Intervalo
Decreciente	$x \leq -1$
Creciente	$-1 \leq x \leq 4$
Constante	$4 \leq x \leq 10$
Decreciente	$10 \leq x \leq 12$
Creciente	$x \geq 12$

5. Traza el bosquejo de la grafica de una función periódica, teniendo en cuenta el periodo dado
a. P=3
b. P=4
c. P=6